# 1 LÓGICA MATEMÁTICA

$$\left[(p \to q) \wedge r\right] \to \left[r \to q\right]$$



$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \Rightarrow C$$

Cotidianamente tratamos de pensar y actuar inteligentemente. Nuestras acciones están dirigidas a que sean o parezcan coherentes. Pero para situaciones formales un tanto complicadas, nuestros argumentos elementales no nos ayudan a resolverlas. Es aquí donde entra la necesidad de considerar mecanismos abstractos para el análisis formal. La lógica matemática nos permite hacer estos análisis, haciendo que todas las verdades de la razón sean reducidas a una especie de cálculo.

Con la lógica matemática podemos precisar la equivalencia entre expresiones abstractas, podemos analizar la validez de argumentos o razonamientos, podemos realizar demostraciones formales,...

# 1.1 PROPOSICIONES

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:
- Defina proposición.
- Conozca la notación para proposiciones.
- Reconozca proposiciones.
- Dé ejemplos de proposiciones.
- Dé ejemplos de enunciados que no sean proposiciones.

La Lógica Matemática, hace uso exclusivo de expresiones que manifiestan o una verdad o una falsedad. A estas expresiones se las llaman *PROPOSICIONES.*

Entonces:

> ***PROPOSICIONES*** *son afirmaciones a las que se les puede asignar o bien un valor de verdad de VERDADERO o bien un valor de verdad de FALSO.*

***Ejemplos***

1."*Hoy es Lunes*" (suponga que efectivamente estamos en el día lunes de la semana, entonces esta expresión será una afirmación VERDADERA).

2."*Estoy en la clase de matemáticas*" (suponga que la persona que emite esta afirmación, efectivamente está presenciando la clase de matemáticas; en este caso esta expresión será una afirmación también VERDADERA).

3."*Estoy en España*" (suponga ahora que la persona que emite ésta frase se encuentra en Ecuador y no en España, entonces esta afirmación será una proposición FALSA).

Otras expresiones, como las exclamaciones, las preguntas, deseos o mandatos; no son consideradas como proposiciones por la Lógica Matemática.

***Ejemplos:***

1.¡Ojalá Llueva!
2.¿Hiciste el deber de Matemáticas?
3.Siéntate y estate quieto.

## 1.1.1 NOTACIÓN

De aquí en adelante adoptaremos los siguientes **símbolos** para el VALOR DE VERDAD de una proposición:

| | |
|---|---|
| VERDADE | 1 |

| | |
|---|---|
| *RO* | |
| *FALSO* | 0 |

Los SÍMBOLOS que se adoptan para las proposiciones suelen ser las PRIMERAS LETRAS DEL ABECEDARIO en minúscula.

***Ejercicio Propuesto 1.1***

Indique ¿cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones y cuáles no?:

a) Esta fruta está verde.
b) ¿Estás contenta?
c) Siéntate y estate quieto
d) 3 +7= 10
e) El ratón trepó a la mesa.
f) Mañana se acabará el mundo.
g) Ramón Ramírez debe pagar sus deudas a menos que quiera ir a la cárcel.
h) ¿Es feo Juan?
i) La edad del universo es de unos 15 mil millones de años.
j) ¡Márchate!

Ahora bien en nuestro lenguaje común usamos frecuentemente proposiciones más extensas como:

- **No** hice el deber de Matemáticas.
- Estoy en Ecuador **y** estoy feliz.
- Estudio **ó** juego fútbol.
- **Si** estudio **entonces** sacaré buena calificación en el examen.

Surge entonces la necesidad de definir a los nexos de estas proposiciones, los llamados Conectores u Operadores lógicos.

## 1.2 OPERADORES (CONECTORES) LÓGICOS

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:

- Conozca la notación para los operadores lógicos.
- Deduzca, con ejemplos, la esencia de los operadores lógicos y la tabla de verdad para las operaciones lógicas.
- Analice e interprete las condiciones suficientes y las condiciones necesarias en una condicional.
- Comprenda e interprete la recíproca, la inversa y la contrarecíproca de una condicional.
- Traduzca del lenguaje común al lenguaje formal

### 1.2.1 NEGACIÓN

La negación se presenta con los términos:

- *No*
- *No es verdad que*
- *No es cierto que*

El **SÍMBOLO LÓGICO** que se emplea para traducirla es: $\neg$

Aunque también se suele emplear: 

Analicemos lo siguiente.

***Ejemplos***

| | |
|---|---|
| *1.* SUPONGA QUE ESTAMOS EN EL DÍA LUNES DE LA SEMANA, entonces al decir: | |
| $a$ : "*Hoy es Lunes*" (será una proposición VERDADERA). | $\neg a$ : "*Hoy no es Lunes* " (en cambio esta proposición será FALSA). |
| *2.* SUPONGA QUE NO ESTÉ LLOVIENDO, entonces al decir: | |
| $a$ : "*Está lloviendo*" (será una proposición FALSA) | $\neg a$ : "*No está lloviendo*" (en cambio esta proposición será VERDADERA) |

Si ubicamos estas observaciones en una tabla que nos indique todas estas posibilidades formamos la llamada **TABLA DE VERDAD**.

Que para la negación sería:

| $a$ | $\neg a$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Observe que:

> *El operador **NEGACIÓN** CAMBIA EL VALOR DE VERDAD de una proposición.*

### 1.2.2 CONJUNCIÓN

Este operador lo tenemos cuando enlazamos proposiciones con el término y

En lenguaje formal se lo traduce con el **SÍMBOLO**: 

***Ejemplo***

| |
|---|
| CONSIDEREMOS LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES: |
| $a$ : "*Tengo una moneda de 50 centavos en el bolsillo*"<br>$b$ : "*Tengo una moneda de 25 centavos en el bolsillo*" |
| LA CONJUNCIÓN DE LAS DOS PROPOSICIONES SERÍA: |
| $a \wedge b$ : "*Tengo una moneda de 50 y una de 25 centavos en el bolsillo*" |

Entonces al suponer que:

1. En verdad se tiene las dos monedas ( $a \equiv 1; b \equiv 1$ ) entonces decir "*Tengo una moneda de 50 y una de 25 centavos en el bolsillo*", será una VERDAD.

2. Si se tiene la moneda de 50 centavos y no la de 25 centavos ( $a \equiv 1; b \equiv 0$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 y una de 25 centavos en el bolsillo*", será FALSA.

3. Si no se tiene la moneda de 50 centavos y si la de 25 centavos ( $a \equiv 0\,; b \equiv 1$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 y una de 25 centavos en el bolsillo*", será también FALSA.

4. Si no se tienen las dos monedas ( $a \equiv 0\,; b \equiv 0$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 y una de 25 centavos en el bolsillo*", también será FALSA.

Por lo tanto, LA TABLA DE VERDAD para la conjunción sería:

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Observe que:

> *La CONJUNCIÓN de dos proposiciones es VERDADERA siempre y cuando ambas proposiciones sean verdaderas.*

### 1.2.3 DISYUNCIÓN INCLUSIVA

La disyunción inclusiva aparece cuando enlazamos proposiciones con el término: O

Se lo traduce con el **SÍMBOLO LÓGICO**: 

**Ejemplo**

Considerando las mismas proposiciones anteriores:

| |
|---|
| $a$ : "*Tengo una moneda de 50 centavos en el bolsillo*"<br>$b$ : "*Tengo una moneda de 25 centavos en el bolsillo*" |
| LA DISYUNCION DE LAS DOS PROPOSICIONES SERÍA: |
| $a \vee b$ : "*Tengo una moneda de 50 o una de 25 centavos en el bolsillo*" |

Entonces al suponer que:

1. En verdad se tenga las dos monedas ( $a \equiv 1; b \equiv 1$ )entonces decir "*Tengo una moneda de 50 o una de 25 centavos en el bolsillo*", será una VERDAD.

2. Si se tiene la moneda de 50 centavos y no la de 25 centavos ( $a \equiv 1; b \equiv 0$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 o una de 25 centavos en el bolsillo*", será también una VERDAD.

3. Si no se tiene la moneda de 50 centavos y si la de 25 centavos ( $a \equiv 0\,; b \equiv 1$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 o una de 25 centavos en el bolsillo*", será también una VERDAD.

4. Si no se tienen las dos monedas ( $a \equiv 0\,; b \equiv 0$ ), la proposición "*Tengo una moneda de 50 o una de 25 centavos en el bolsillo*", será una FALSEDAD.

Por lo tanto, LA TABLA DE VERDAD para la disyunción inclusiva sería:

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Note que:

> *La DISYUNCIÓN INCLUSIVA de dos proposiciones es FALSA siempre y cuando ambas proposiciones sean falsas.*

### 1.2.4 DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Seguramente usted ha expresado disyuntivas en donde se admite, lo uno ó lo otro pero no ambas cosas.

*Ejemplos*

1."*Daniel está en España o Italia*"
2."*Jessica tiene una altura de 1.70 m. o 1.65 m.*"
3."*El motivo del crimen fue o bien el robo o bien la venganza*"

Estos ejemplos se los puede interpretar como:

- "Daniel está en España o está en Italia, pero no puede estar en ambos lugares a la vez"
- "Jessica tiene una altura de 1.70 m. o una altura de 1.65 m., pero no puede tener ambas estaturas a la vez"
- "El motivo del crimen fue sólo el robo o sólo la venganza"

En el último ejemplo, con el término "sólo" desechamos la idea de que el motivo del crimen sea el robo y la venganza a la vez.

Entonces el término en lenguaje común sería: "**ó…ó…**". Como también el término "**o bien……o bien…..**".

EL **SÍMBOLO LÓGICO** que se emplea para traducirla es: $\veebar$. Aunque también se emplea el símbolo $\oplus$

Sin embargo, la disyunción exclusiva se la traduce en término de la disyunción inclusiva de la forma: $(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$

LA TABLA DE VERDAD para la disyunción exclusiva sería:

| $a$ | $b$ | $a \veebar b$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Por lo tanto, se podría decir que:

*La **DISYUNCIÓN EXCLUSIVA** de dos proposiciones es FALSA siempre y cuando ambas proposiciones sean falsas y también cuando ambas sean verdaderas.*

### 1.2.5 ENUNCIACIÓN HIPOTÉTICA

Este es el conector lógico más importante. Llamado también condicional o implicación.

Aparece cuando enlazamos dos proposiciones $a$ y $b$ de la forma: "*Si* $a$ **entonces** $b$",

Se traduce con el **SÍMBOLO LÓGICO**: $a \to b$

En este caso a la proposición "$a$" se la llama: *Antecedente, Hipótesis, Premisa*

y a la proposición "$b$" se la llama: *Consecuente, Tesis, Conclusión.*

Existen OTROS LENGUAJES RELACIONADOS con la enunciación hipotética. Estos son:

- *" a implica b "*
- *"Basta a para que b "*
- *"a sólo si b "*
- *"a solamente si b "*
- *"b si a "*
- *"b cada vez que a "*
- *"b siempre que a "*

- *"b puesto que a"*
- *"b ya que a"*
- *"b cuando a"*
- *"b debido a que a"*
- *"b porque a"*

**Ejemplo**

Supóngase que un padre le dice a su hijo:
"*Si apruebas el preuniversitario entonces te regalaré un carro*".

Bien, ahora piense que:

1. Efectivamente el hijo aprueba el preuniversitario, y que el padre le regala el carro. Entonces el padre ha dicho una VERDAD.
2. Si el hijo aprueba el preuniversitario y el padre no le regala el carro. Entonces el padre ha dicho una MENTIRA (FALSEDAD).
3. Si el hijo no aprueba el preuniversitario y sin embargo el padre le regala el carro, aunque no está obligado a hacerlo. Entonces el padre NO ha dicho una MENTIRA.
4. Si el hijo no aprueba el preuniversitario y el padre no le regala el carro. El padre tampoco ha dicho una MENTIRA.

Entonces, LA TABLA DE VERDAD para la enunciación hipotética sería:

| $a$ | $b$ | $a \to b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Por lo tanto, se podría decir que:

*La ENUNCIACIÓN HIPOTÉTICA es FALSA sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.*

Vale la pena recalcar que, no es necesario que exista relación causal entre la proposición "$a$" y la proposición "$b$". El valor de verdad de la nueva proposición depende de los valores de verdad de cada una de las proposiciones.

#### 1.2.5.1 Condiciones necesarias y suficientes

En ocasiones, una enunciación hipotética verdadera, en donde existe relación causal entre el antecedente ***a*** y el consecuente ***b*** , se interpreta como:

"***a*** es condición suficiente para ***b***"

"***b*** es condición necesaria para ***a***"

Lo cual nos indica otras dos formas de lenguaje relacionado para la enunciación hipotética.

**Ejemplo**

***"Si un número es divisible para 4 entonces es divisible para 2"***

Este enunciado puede ser interpretado, parafraseándolo de la siguiente manera:

- "Es SUFICIENTE que un número sea divisible para 4 para que sea divisible para 2"

O también:

- "Es NECESARIO que un número sea divisible para 2, para que sea divisible para 4" (también: "si un número es divisible para 4, necesariamente será divisible para 2")

Es importante mencionar que si se intercambia el antecedente con el consecuente la enunciación hipotética cambia.

**Ejemplo**

Considerando el ejemplo anterior, al enunciar la proposición de la siguiente forma:

"*Si un número es divisible para 2 entonces es divisible para 4*"

es FALSA; porque es indudable que existen números divisibles para 2 que no son divisibles para 4 (6 por ejemplo).

El enunciado anterior también puede ser parafraseado de las siguientes formas:

- " La divisibilidad para 4 implica la divisibilidad para 2 "
- " Un número es divisible para 4 sólo si es divisible 2"
- " Basta que un número sea divisible para 4 para que sea divisible para 2".
- " Un número es divisible para 2 siempre que sea divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 si es divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 puesto que es divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 ya que es divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 cada vez que sea divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 cuando es divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 debido a que es divisible para 4"
- " Un número es divisible para 2 porque es divisible para 4"

### 1.2.5.2 VARIACIONES DE LA CONDICIONAL

Para la implicación $a \to b$ se define:

LA RECÍPROCA:: $b \to a$

LA INVERSA:: $\neg a \to \neg b$

## *LA CONTRARRECÍPROCA::*

$\neg b \rightarrow \neg a$

### *Ejemplo*

Sea la proposición:

"***Iré el sábado, si me pagan***"

Primero identifiquemos el antecedente $a$ : Me pagan

y el consecuente $b$ : iré el sábado

Luego tenemos:

"Si me pagan, entonces iré el sábado"

De aquí:

RECÍPROCA: "Si voy el sábado, entonces me pagan"
INVERSA: "Si no me pagan, entonces no iré el sábado"
CONTRARRECÍPROCA: "Si no voy el sábado, entonces no me pagan"

### *Ejercicios Propuestos 1.2*

1. En las siguientes proposiciones, identifique el ANTECEDENTE y el CONSECUENTE.
   a) Si no se ama a primera vista, no se ama como es debido.
   b) Para ser secretaria se necesita enseñar la rodilla.
   c) El que roba un dolar, roba un millón.
   d) Pienso, luego existo.
   e) Quien siembre vientos, cosecha tempestades.
   f) Para que un polígono sea rectángulo, es suficiente que sea cuadrado.
   g) No somos débiles si hacemos uso apropiado de los medios que el Dios de la Naturaleza ha puesto bajo nuestro dominio.
   h) Tendrás éxito solamente si aprecias la opinión de los demás.
   i) Únicamente mediante el error auténtico y el trabajo espontáneo y creativo puede el ser humano superar su angustia y soledad.

2. Considerando las proposiciones:
   $a$ : Yo terminé mi deber antes de comer.
   $b$ : Yo juego tenis por la tarde.
   $c$ : Hoy hace sol.
   $d$ : Hoy hay poca humedad.

   Escribir en LENGUAJE SIMBÓLICO :
   a) Es necesario que termine de hacer mi deber antes de comer y que haya poca humedad para que si hace sol yo juegue tenis por la tarde.
   b) Para mí es suficiente que no haya sol y haya poca humedad para que no salga a jugar tenis por la tarde.

3. Sean las proposiciones:
   $a$ : Te gustan las matemáticas
   $b$ : Te gusta este deber

   TRADUZCA las siguientes proposiciones al lenguaje común:
   a) $a \rightarrow b$
   b) $\neg a \vee b$
   c) $\neg b \rightarrow \neg a$
   d) $(a \vee \neg a) \rightarrow b$

4. Dada la proposición:
   "*Si un triángulo está circunscrito en un semicírculo, entonces es rectángulo*"
   Escriba la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca.

## 1.3 PROPOSICIONES MOLECULARES

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:
- Defina proposiciones atómicas y moleculares.
- Establezca el valor de verdad de una proposición molecular.

Las ***PROPOSICIONES MOLECULARES*** son expresiones que están compuestas por varias proposiciones conectadas por operadores lógicos. A las proposiciones simples, en las que no aparecen operadores lógicos, se las denominan ***PROPOSICIONES ATÓMICAS***.

***Ejemplo***

$$\left(\left(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}\right) \wedge \neg \boldsymbol{c}\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\right)$$

Las proposiciones atómicas para este ejemplo serían $a$, $b$ y $c$.

El valor de verdad de la proposición molecular depende del valor de verdad de las proposiciones atómicas que la componen.

Suponga que: $\boldsymbol{a} \equiv 1$; $\boldsymbol{b} \equiv 0$ y $\boldsymbol{c} \equiv 1$ , entonces la proposición molecular anterior es VERDADERA, porque:

$$\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\boldsymbol{a}}_{1} \vee \underbrace{\boldsymbol{b}}_{0}\right)}_{1} \wedge \underbrace{\neg \underbrace{\boldsymbol{c}}_{1}}_{0}\right)}_{0} \rightarrow \underbrace{\left(\underbrace{\boldsymbol{a}}_{1} \wedge \underbrace{\boldsymbol{b}}_{0}\right)}_{0}}_{1}$$

.

***Ejercicios Propuestos 1.3***

Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones atómicas $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, y $f$ son respectivamente 0,0,1,1,0,1; determinar el VALOR DE VERDAD de cada una de las proposiciones moleculares siguientes:

1. $\left[(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)\right] \rightarrow c$
2. $\{[a \rightarrow (b \vee \neg a)] \wedge (c \rightarrow d) \wedge (e \vee [d \rightarrow f])\} \rightarrow (a \rightarrow b)$
3. $\{[a \wedge (\neg b \wedge a)] \wedge (c \wedge \neg d)\} \wedge \{[\neg e \wedge (d \wedge \neg f)] \rightarrow (a \rightarrow f)\}$

## 1.4 FORMAS PROPOSICIONALES

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:
- Defina formas proposicionales.
- Defina tautologías, falacias y contradicciones.
- Aplique la definición de tautología y la de falacia para clasificar formas proposicionales dadas.
- Defina formas equivalentes
- Determine si formas proposicionales dadas son equivalentes o no

*Una **FORMA PROPOSICIONAL** es una expresión constituida por símbolos que representan o conectores lógicos o variables proposicionales.*

**Ejemplo**

$$\left(\left(p \vee q\right) \wedge \neg r\right) \rightarrow \left(p \wedge q\right)$$

Donde $p, q, r$ son VARIABLES PROPOSICIONALES, que pueden representar proposiciones atómicas o proposiciones moleculares.

Si reemplazamos a $p$, $q$ y $r$ por proposiciones falsas y verdaderas los resultados son proposiciones moleculares.

El número de proposiciones moleculares que se generan es igual a $2^n$, donde $n$ es el número de variables proposicionales.

Para el ejemplo anterior, como la forma proposicional tiene 3 variables proposicionales, entonces hay $2^3 = 8$ proposiciones moleculares, cuyos valores de verdad se muestran en la siguiente tabla:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $\neg r$ | $(p \vee q) \wedge \neg r$ | $p \wedge q$ | $((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Observe que con tres variables, para no repetir casos, las dos últimas variables $q$ y $r$ mantienen las cuatros combinaciones básicas

(ambas verdaderas, una de ellas verdadera mientras la otra falsa y ambas falsas) y la primera variable $p$ es verdadera. Luego, lo mismo para las dos últimas variables, pero con la primera falsa.

Si hubiesen 4 variables proposicionales, se hacen las ocho combinaciones anteriores con las últimas tres variables y la primera variable verdadera; luego, lo mismo que lo anterior pero con la primera falsa, es decir:

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Para más variables repetir el proceso de forma análoga.

Existen formas proposicionales muy singulares y que van a ser de mucho interés para nuestras necesidades.

> ***TAUTOLOGÍA:*** *Forma proposicional cuya estructura lógica da lugar a proposiciones* VERDADERAS *para todos los casos de valores de verdad de las variables proposicionales que las componen.*

Cuando una forma proposicional NO ES TAUTOLÓGICA se la llama **FALACIA.**

> ***CONTRADICCION:*** *Forma proposicional cuya estructura lógica da lugar a proposiciones*

*FALSAS, sin importar el valor de verdad de sus variables.*

## *Ejemplo*

Al observar la tabla de verdad de la forma proposicional

$$(p \to q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \to q$ | $\neg p \vee q$ | $(p \to q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Notamos que el valor de verdad de las proposiciones que se generan es siempre verdadero, sim importar el valor de verdad de las variables proposicionales intervinientes. Por tanto es una TAUTOLOGÍA.
Si al menos, fuese falsa en un caso, entonces sería una FALACIA.

### 1.4.1 IMPLICACIONES LÓGICAS

*Sean $A$ y $B$ dos formas proposicionales. Decimos que $A$ **implica lógicamente** a $B$ si y sólo sí $A \to B$ es una tautología.*

En este caso se escribe $A \Rightarrow B$.

Algunas implicaciones lógicas típicas son:

| | |
|---|---|
| $p \Rightarrow [p \vee q]$ | Adición |
| $[p \wedge q] \Rightarrow p$ | Simplificación |
| $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$ | Modus Ponens |
| $[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ | Modus Tollens |
| $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$ | Silogismo Disyuntivo |
| $p \Rightarrow [q \to (p \wedge q)]$ | |
| $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [p \to r]$ | Silogismo Hipotético |
| $[p \to q] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee r)]$ | |
| $[p \to q] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$ | |
| $[p \to q] \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$ | |
| $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$<br>$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$ | Dilemas constructivos |
| $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(\neg q \vee \neg s) \to (\neg p \vee \neg r)]$<br>$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(\neg q \wedge \neg s) \to (\neg p \wedge \neg r)]$ | Dilemas constructivos |

## *Ejercicios Propuestos 1.4*

1. DEMUESTRE las Implicaciones Lógicas anteriores.

2. Escriba la TABLA DE VERDAD de las siguientes formas proposicionales:
   a) $p \to (\neg p \to p)$
   b) $(p \wedge q) \wedge (p \to \neg q)$
   c) $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
   d) $(p \vee q) \to (p \vee (\neg p \wedge q))$

3. ¿Cuál de las siguientes formas proposicionales NO ES TAUTOLÓGICA?
   a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
   b) $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow p$
   c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   d) $(\neg p \wedge (p \to q)) \Rightarrow \neg q$
   e) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

4. Una de las siguientes formas proposicionales NO ES TAUTOLÓGICA, identifíquela.
   a) $[p \wedge (p \to \neg q)] \Rightarrow \neg q$
   b) $[\neg p \wedge (q \vee \neg p)] \Rightarrow \neg p$
   c) $[\neg p \wedge (p \to \neg q)] \Rightarrow \neg q$
   d) $[(q \to r) \wedge (p \to q)] \Rightarrow (p \to r)$
   e) $[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

5. Sean $p, q, r$ variables proposicionales, entonces la forma proposicional que NO ES TAUTOLÓGICA es:
   a) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (q \to \neg p)$
   b) $[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
   c) $[(p \wedge q) \to r] \Rightarrow [(p \to r) \vee (q \to r)]$
   d) $[(p \to q) \wedge (\neg q \to r)] \Rightarrow (p \to \neg r)$
   e) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$

6. La expresión $B$ para que la forma proposicional: $\{\{\neg[\neg p \vee (\neg p \wedge q)] \to \neg q\} \wedge q\} \Rightarrow B$ NO SEA TAUTOLÓGICA es:
   a) $\neg(p \wedge q)$
   b) $\neg p \vee q$
   c) $q$
   d) $p$
   e) $\neg p$

7. HALLAR el operador " $\nabla$ " para que la forma proposicional sea tautológica:
$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(\neg q \nabla s) \to (\neg q \vee \neg r)]$$

## 1.5 BICONDICIONAL

Un nuevo operador lógico es la doble implicación, llamado también BICONDICIONAL.

El símbolo empleado es: $\leftrightarrow$. Que enlazando dos proposiciones sería $a \leftrightarrow b$. Que significa $(a \to b) \wedge (b \to a)$ y se lee "$a$ **sí y sólo sí** $b$".

Su tabla de verdad sería:

| $a$ | $b$ | $a \leftrightarrow b$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Observamos que:

> *La **BICONDICIONAL** es VERDADERA cuando ambas proposiciones son verdaderas o ambas falsas, es decir cuando tienen el mismo valor de verdad. Caso contrario es falsa.*

### 1.5.1 EQUIVALENCIAS LÓGICAS

> *Sean $A$ y $B$ dos formas proposicionales. Decimos que $A$ es **LÓGICAMENTE EQUIVALENTE** a $B$ si y sólo sí $A \leftrightarrow B$ es una tautología.*

En este caso se escribe $A \Leftrightarrow B$. Como también $A \equiv B$

Analicemos la tabla de verdad de las siguientes dos formas proposicionales: $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $\overbrace{p \rightarrow q}^{A}$ | $\neg p$ | $\overbrace{\neg p \vee q}^{B}$ | $\overbrace{(p \rightarrow q)}^{A} \Rightarrow \overbrace{(\neg p \vee q)}^{B}$ | $\overbrace{(\neg p \vee q)}^{B} \Rightarrow \overbrace{(p \rightarrow q)}^{A}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

En ambos sentidos la implicación con estas dos formas proposicionales es tautológica, lo cual quiere decir que son formas Lógicamente Equivalentes. Es decir, $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Como conclusión se puede decir que:

Dos formas proposicionales son ***LÓGICAMENTE EQUIVALENTES*** si tienen el MISMO VALOR DE VERDAD bajo iguales condiciones de valores de verdad de las variables intervinientes.

Aquí se puede observar la importancia de la lógica de símbolos. Es muy difícil precisar con nuestros sentidos que la expresión "*Si estudio entonces aprenderé*" es Lógicamente Equivalente a " *No estudio o aprendo*".

### *Ejemplo*

Al decir: "*Una matriz tiene inversa, si y sólo si su determinante es diferente de cero*".

Se deberá entender que es equivalente que una matriz $A$ tenga inversa a que su determinante sea diferente de cero.

Ahora analicemos estas otras dos formas proposicionales $p \to q$ y $\neg q \to \neg p$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \to q$ | $\neg q \to \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Por lo tanto, $p \to q$ es Lógicamente Equivalente a su contrarrecíproca $\neg q \to \neg p$

### *Ejercicios Propuestos* 1.5

Investigue si las siguientes EQUIVALENCIAS SON CORRECTAS O NO:

a) $[(p \to q) \vee r] \equiv [p \to (q \vee r)]$
b) $[(p \to q) \wedge r] \equiv [p \to (q \wedge r)]$
c) $[(p \wedge q) \vee r] \equiv [p \wedge (q \vee r)]$
d) $[(p \wedge q) \to r] \equiv [p \wedge (q \to r)]$
e) $[(p \vee q) \wedge r] \equiv [p \vee (q \wedge r)]$
f) $[(p \vee q) \to r] \equiv [p \vee (q \to r)]$

## 1.6 ALGEBRA DE PROPOSICIONES

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:
- Traduzca del lenguaje común al lenguaje formal.
- Aplique lEquivalencias Lógicas para encontrar traducciones equivalentes.

Clasificando algunas Equivalencias Lógicas, resulta:

| **CONJUNCIÓN** | | **DISYUNCIÓN** |
|---|---|---|
| $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ | ***Conmutativa*** | $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ |
| $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | ***Asociativa*** | $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ |
| $(p \wedge p) \equiv p$ | ***Idempotencia*** | $(p \vee p) \equiv p$ |
| $(p \wedge 1) \equiv p$ | ***Identidad*** | $(p \vee 0) \equiv p$ |
| $(p \wedge 0) \equiv 0$ | ***Absorción*** | $(p \vee 1) \equiv 1$ |

| **LEYES DISTRIBUTIVAS** | **NEGACIÓN** |
|---|---|
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $\neg 0 \equiv 1$<br>$\neg 1 \equiv 0$<br>$\neg(\neg p) \equiv p$ ***doble negación*** |

| **OTRAS:** | |
|---|---|
| $\left.\begin{array}{l}\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q\end{array}\right\}$ | ***Leyes de De Morgan*** |
| $(p \vee \neg p) \equiv 1$ | ***Ley del tercer excluído*** |
| $(p \wedge \neg p) \equiv 0$ | ***Ley de la contradicción*** |
| $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ | ***Contrapositiva o Contrarrecíproca*** |
| $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ | ***Implicación*** |
| $(p \vee q) \equiv (\neg p \rightarrow q)$ | |
| $(p \wedge q) \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$ | |
| $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \rightarrow r]$ | |
| $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$ | |
| $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ | ***Ley de exportación*** |
| $(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow 0]$ | ***Reducción al absurdo*** |
| $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$<br>$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$ | ***Equivalencia*** |

No olvide demostrarlas.

Una utilidad de las Equivalencias Lógicas la observamos a continuación.

## *Ejemplo 1*

La TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la siguiente proposición:

"*Si tú eres inteligente y no actúas con prudencia, eres un ignorante en la materia* "

Siendo: $m$: tú eres inteligente
$n$: tú actúas con prudencia
$p$: tú eres un ignorante en la materia

Es:

SOLUCIÓN:

La traducción sería: $(\boldsymbol{m} \wedge \neg \boldsymbol{n}) \rightarrow \boldsymbol{p}$. Pero tiene apariencia diferente a las opciones de respuestas, entonces empleando el álgebra de proposiciones obtenemos:

$\neg(\boldsymbol{m} \wedge \neg \boldsymbol{n}) \vee \boldsymbol{p}$
$\neg \boldsymbol{m} \vee \boldsymbol{n} \vee \boldsymbol{p}$
$\neg \boldsymbol{m} \vee (\boldsymbol{n} \vee \boldsymbol{p})$
$\boldsymbol{m} \rightarrow (\boldsymbol{n} \vee \boldsymbol{p})$

a) $m \to (n \vee p)$
b) $p \to (m \wedge \neg n)$
c) $m \vee (n \vee p)$
d) $(m \wedge \neg p) \to \neg n$
e) $m \to \neg(n \vee p)$

---

## Ejemplo 2

Dada la proposición molecular: "*Hoy es jueves y tengo que dar un examen, pero si hay huelga, entonces no voy a la Politécnica*", y las proposiciones atómicas:

$a$ : Hoy es jueves. $b$ : Tengo que dar un examen.
$c$ : Hay huelga. $d$ : Me voy a la Politécnica.

Entonces la TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la proposición molecular es:

a) $(a \wedge b \wedge c) \to d$ b) $(d \to \neg c) \wedge (a \wedge b)$ c) $(a \wedge b) \to (c \vee \neg d)$
d) $(a \wedge b) \wedge (\neg c \to d)$ e) $(c \to d) \wedge (a \wedge b)$

SOLUCIÓN:

Traduciendo tenemos $(a \wedge b) \wedge (c \to \neg d)$ , por la contrarecíproca $(a \wedge b) \wedge (\neg(\neg d) \to \neg c)$ entonces $(a \wedge b) \wedge (d \to \neg c)$ que es lo mismo que $(d \to \neg c) \wedge (a \wedge b)$

RESPUESTA: Opción "b".

---

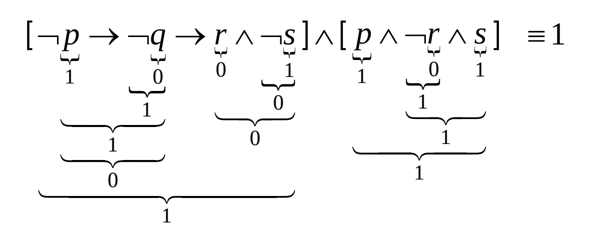
Analicemos este otro tipo de ejercicio.

## Ejemplo 3

Si la proposición: $[\neg(p \to \neg q) \to (r \wedge \neg s)] \wedge [p \wedge (\neg r \wedge s)]$ es VERDADERA, entonces es VERDAD que:

a) $p \vee q \equiv 0$ b) $q \wedge s \equiv 1$ c) $(r \vee s) \wedge q \equiv 0$
d) $q \equiv 1$ e) $p \wedge r \equiv 1$

SOLUCIÓN: Debemos ir analizando desde la proposición molecular hasta llegar a las proposiciones atómicas.




Del análisis se concluye que: $p \equiv 1$, $s \equiv 1$, $r \equiv 0$, $q \equiv 0$

Ahora que hemos encontrado los valores de verdad de cada una de las proposiciones, , podemos analizar una a una las opciones proporcionadas:

a) $p \vee q \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ mas no 0 como se indica

b) $q \wedge s \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$ mas no 1 como se indica

c) $(r \vee s) \wedge q \equiv (0 \vee 1) \wedge 0 \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ tal como se indica y por tanto esta sería la respuesta.

---

## Ejercicios Propuestos 1.6

1. Seleccione la TRADUCCIÓN correcta de la siguiente afirmación:
   "*Si retiro el dinero del banco, compro un carro o una casa"*
   Considerando las proposiciones atómicas :
   $p$ : Retiro el dinero del banco
   $q$ : Compro un carro
   $r$ : Compro una casa

   a) $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$  b) $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}$  c) $\neg \boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$
   d) $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}$  e) $\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

2. La TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la proposición :
   "*Si me voy a casa, me voy de compras y si no me voy a casa, entonces voy al cine*"
   siendo las proposiciones atómicas:
   $\boldsymbol{a}$ : Me voy a casa  $\boldsymbol{b}$ : Me voy de compras  $\boldsymbol{c}$ : Voy al cine
   es:
   a) $(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c})$  c) $(\neg \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c})$
   b) $(\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c})$  d) $(\neg \boldsymbol{b} \rightarrow \neg \boldsymbol{a}) \wedge (\neg \boldsymbol{c} \rightarrow \boldsymbol{a})$  e) $(\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{c} \rightarrow \neg \boldsymbol{a})$

3. La TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la proposición: "*Si se es estudioso o dedicado, entonces se aprueba el Prepolitécnico*". Siendo las proposiciones atómicas:
   $\boldsymbol{a}$ : Se es estudioso.
   $\boldsymbol{b}$ : Se es dedicado.
   $\boldsymbol{c}$ : Se aprueba el Prepolitécnico.
   es: a) $\neg \boldsymbol{a} \rightarrow (\neg \boldsymbol{b} \wedge \neg \boldsymbol{c})$  b) $(\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{c})$
   c) $(\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{c}) \wedge \neg \boldsymbol{b}$  d) $\boldsymbol{a} \rightarrow (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c})$  e) $\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{c})$

4. Dada la proposición:
   "*Si hay huelgas y paro de transportistas, entonces las pérdidas serán cuantiosas*"
   Entonces es EQUIVALENTE a la siguiente proposición:

a) Si no hay pérdidas cuantiosas entonces no hay huelgas o no hay paro de transportistas.
b) Si no hay pérdidas cuantiosas entonces no hay huelgas y si hay paro de transportistas.
c) Si no hay pérdidas cuantiosas entonces hay huelgas y no hay paro de transportistas.
d) Si no hay huelgas ni paro de transportistas entonces no hay pérdidas cuantiosas.
e) Si no hay huelgas entonces no hay paro de transportistas ni pérdidas cuantiosas.

5. La proposición: $(a \vee b) \rightarrow (c \wedge \neg a)$ es EQUIVALENTE a:
a) $(a \vee b) \rightarrow \neg c$ b) $a \rightarrow (b \wedge \neg c)$
c) $\neg a \wedge (\neg b \vee c)$ d) $(a \vee b) \rightarrow c$ e) $((a \wedge b) \vee c) \rightarrow \neg a$

6. La forma proposicional: $[(p \vee q) \wedge p] \wedge [(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q] \wedge [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ es EQUIVALENTE a:
a) $q \rightarrow p$ b) $\neg p$ c) $q$
d) Elija esta opción si la forma proposicional es siempre falsa.
e) Elija esta opción si la forma proposicional es siempre verdadera.

7. Sea la proposición: "*El autobús llega tarde, siempre que el conductor se haya desviado*". Suponiendo que la proposición es verdadera. Entonces una proposición EQUIVALENTE a la anterior, es:
a) Que el autobús llegue tarde es una condición suficiente para que el conductor se haya desviado.
b) Una condición suficiente para que el autobús llegue tarde es que el conductor se haya desviado.
c) Una condición necesaria para que el autobús llegue tarde es que el conductor se haya desviado.
d) Si el autobús llega tarde, el conductor se ha desviado.
e) El autobús no llega tarde o el conductor se ha desviado.

8. La CONTRARRECÍPROCA de la proposición:
"Si *EL NIÑO* es un fenómeno o un desastre natural, entonces no es una simple lluvia o un mal pasajero" es:
a) Si *EL NIÑO* es una simple lluvia y no un mal pasajero, no es un fenómeno ni un desastre natural.
b) *EL NIÑO* no es un fenómeno ni un desastre natural, porque es un mal pasajero y no una simple lluvia.
c) *EL NIÑO* es un fenómeno, desastre natural, simple lluvia y un mal pasajero.
d) *EL NIÑO* no es un fenómeno ni desastre natural, si es una simple lluvia y un mal pasajero.
e) *EL NIÑO* no es una simple lluvia o un mal pasajero solo si no es un fenómeno.

8. Si se da la proposición:
"Si he estudiado mucho o me he preparado lo suficiente, entonces no daré un mal examen o mis padres estarán contentos"
Entonces su proposición CONTRARRECÍPROCA es:
a) Si no doy un mal examen y mis padres no están contentos, no he estudiado ni me he preparado lo suficiente.
b) He estudiado mucho, me he preparado lo suficiente, no daré un mal examen y mis padres estarán contentos.
c) Ni he estudiado mucho ni me he preparado lo suficiente, porque mis padres no estarán contentos y daré un mal examen.
d) Ni he estudiado mucho ni me he preparado lo suficiente, si doy un mal examen y mis padres están contentos.
e) No daré un mal examen o mis padres estarán contentos sólo si he estudiado mucho.

10. Dadas las proposiciones atómicas: $p$ : Me estoy bañando. $q$ : Me voy a una fiesta.
$r$ : Quiero dormir. $s$ : Estoy cansado.
Entonces, la CONTRARRECÍPROCA de la proposición $(p \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee \neg s)$ es:
a) Si me estoy bañando y no quiero dormir, entonces, me voy a una fiesta y no estoy cansado.
b) No es verdad que me voy a una fiesta y estoy cansado y no me estoy bañando o quiero dormir.
c) Si no me voy a una fiesta y estoy cansado, entonces no me estoy bañando o quiero dormir.
d) Si no me estoy bañando o quiero dormir, entonces me voy a una fiesta o estoy cansado.
e) Si me voy a una fiesta o no estoy cansado, entonces me estoy bañando y no quiero dormir.

11. Si la proposición: $[(a \wedge \neg b) \rightarrow d] \vee \neg(d \vee e)$ es FALSA, entonces es VERDAD que:
a) $(b \vee a) \equiv 0$
b) $(\neg e \vee \neg d) \equiv 0$
c) $(d \vee a) \equiv 0$
d) $(a \rightarrow b) \equiv 0$
e) $(e \rightarrow a) \equiv 0$

12. Si la proposición $[(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee q)]$ es FALSA, entonces una de las siguientes proposiciones es FALSA, identifíquela:
a) $[(p \rightarrow q) \wedge (r \wedge \neg q)] \equiv 0$
b) $[(q \wedge r) \vee (\neg p \vee q)] \equiv 0$
c) $[(\neg r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)] \equiv 1$
d) $[(p \vee r) \vee (q \rightarrow \neg r)] \equiv 1$

e) $[(r \to q) \wedge (r \to p)] \equiv 0$

13. Si la proposición $[(p \to q) \wedge r] \to [r \to q]$ es FALSA, entonces es VERDAD que:
   a) El valor de verdad de $p$ es verdadero.
   b) El valor de verdad de $q$ es verdadero.
   c) El valor de verdad de $p$ es falso.
   d) El valor de verdad de $r$ es falso.
   e) El valor de verdad de $p$ no puede ser definido.

# 1.7. RAZONAMIENTOS

OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:

- Defiina razonamiento.
- Defina razonamiento válido.
- Determine la validez de un razonamiento suponiendo que éste es falso.
- Infiriera una conclusión válida para un razonamiento, dadas las hipótesis.
- Justifique la validez de un razonamiento.
- Replantee un razonamiento cambiando la conclusión para que sea válido en el caso de que no lo sea.

Bien ya podemos dedicarnos a una estructura lógica muy importante, que es el objetivo que nos habíamos propuesto.

El tipo de razonamiento que vamos a considerar estará constituido por una enunciación hipotética que tiene como antecedente una conjunción de hipótesis o premisas. Es decir, su estructura lógica será de la forma:

$$\overbrace{[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots H_n]}^{PREMISAS\ O\ HIPOTESIS} \underbrace{\Rightarrow}_{OPERADOR\ PRINCIPAL} \overbrace{C}^{CONCLUSIÓN}$$

Estamos interesados en saber si un razonamiento es válido o no, es decir si la conclusión es lógicamente inferida de las hipótesis.

## 1.7.1. VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

*Un razonamiento es **VÁLIDO** cuando la forma proposicional que se obtiene de la proposición molecular que lo define, es TAUTOLÓGICA. Es decir una Implicación Lógica.*

Como la estructura lógica de los razonamientos presenta la forma $H \Rightarrow C$, entonces podemos dedicarnos a determinar si se produce el siguiente caso $H \equiv 1$ y $C \equiv 0$ que es el único caso cuando la implicación sería falsa, entonces no sería una tautología y por tanto el razonamiento no es válido.

## *Ejemplo 1*

Determine si el siguiente razonamiento es válido o no:

> "*Si soy estudioso , aprobaré el curso ; si soy bailarín, no aprobaré el curso. Por lo tanto, no puedo ser estudioso y bailarín al mismo tiempo"*

SOLUCIÓN:

Considerando las proposiciones atómicas:

$a$ : Soy estudioso
$b$ : Aprobaré el curso.
$c$ : Soy bailarín.

El razonamiento se traduce al lenguaje formal por la proposición molecular:
$$[(a \to b) \wedge (c \to \neg b)] \Rightarrow \neg(a \wedge c).$$

Entonces la forma proposicional correspondiente sería $[(p \to q) \wedge (r \to \neg q)] \Rightarrow \neg(p \wedge r)$

Que debería ser tautológica para que el razonamiento sea válido. Podemos hacer toda la tabla de verdad, pero para evitar tal trabajo nos dedicaremos a investigar si existe por lo menos un caso de falsedad.

$$\underbrace{\left[\left(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \to \underbrace{q}_{1}}_{1}\right) \wedge \left(\underbrace{\underbrace{r}_{1} \to \underbrace{\neg q}_{?}}_{1}\right)\right] \Rightarrow \underbrace{\neg\left(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \wedge \underbrace{r}_{1}}_{1}\right)}_{0}}_{0}$$

Para que la enunciación hipotética sea falsa, se requiere que el antecedente sea verdadero mientras que el consecuente es falso, para lo cual $\neg(p \wedge r) \equiv 0$ entonces $(p \wedge r) \equiv 1$; esto significa que $p \equiv 1$ y $r \equiv 1$. Ahora examinando el antecedente, observamos que para que la primera hipótesis sea verdadera se requiera que $q \equiv 1$, pero la segunda hipótesis se hace falsa porque $\neg q \equiv 0$. Esto nos hace pensar que no va a existir por lo menos una proposición falsa, por lo tanto el razonamiento es VALIDO.

## *Ejemplo 2*

Dadas las siguientes hipótesis:

$H_1$ : La Lógica es difícil o no les gusta a muchos estudiantes.

$H_2$ : Si la Matemática es fácil, entonces la Lógica no es difícil.

Entonces una CONCLUSIÓN VÁLIDA es:

a) La Lógica es difícil.
b) La Matemática es fácil.
c) Si la Matemática no es fácil, a muchos estudiantes no les gusta la lógica.
d) Si a muchos estudiantes les gusta la lógica, la Matemática no es fácil.
e) La Matemática no es fácil o la lógica es difícil.

SOLUCIÓN:

Definamos las proposiciones: $a$ : La lógica es difícil.
$b$ : La lógica les gusta a muchos estudiantes.
$c$ : La Matemática es fácil.

Entonces la traducción de las hipótesis dadas serían: $H_1 : a \vee \neg b$
$H_2 : c \to \neg a$

Cada opción dada sería una posible conclusión, analicemos con cada una:

a) $[(\underbrace{\underbrace{p}_{0} \vee \underbrace{\neg \underbrace{q}_{0}}_{1}}_{1}) \wedge (\underbrace{\underbrace{r}_{1} \to \underbrace{\neg \underbrace{p}_{0}}_{1}}_{1})] \Rightarrow \underbrace{p}_{0}$   No válido

b) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{p}_{1}\vee\underbrace{\neg\underbrace{q}_{0}}_{1}}_{1}\wedge\underbrace{\underbrace{r}_{0}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{p}_{1}}_{0}}_{1}}_{1}\Rightarrow\underbrace{r}_{0}$ No válido

c) $[(\underbrace{\underbrace{p}_{1}\vee\underbrace{\neg\underbrace{q}_{1}}_{0}}_{1})\wedge(\underbrace{\underbrace{r}_{0}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{p}_{1}}_{0}}_{1})]\Rightarrow[\underbrace{\underbrace{\neg\underbrace{r}_{0}}_{1}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{q}_{1}}_{0}}]$ No válido

d) $[(\underbrace{\underbrace{p}_{1}\vee\underbrace{\neg\underbrace{q}_{1}}_{0}}_{1})\wedge(\underbrace{\underbrace{r}_{1}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{p}_{1}}_{0}}_{0})]\Rightarrow[\underbrace{\underbrace{q}_{1}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{r}_{1}}_{0}}_{0}]$ VÁLIDO (Respuesta)

e) $[(\underbrace{\underbrace{p}_{0}\vee\underbrace{\neg\underbrace{q}_{0}}_{1}}_{1})\wedge(\underbrace{\underbrace{r}_{1}\rightarrow\underbrace{\neg\underbrace{p}_{0}}_{1}}_{1})]\Rightarrow[\underbrace{\underbrace{\neg\underbrace{r}_{1}}_{0}\vee\underbrace{p}_{0}}_{0}]$ No válido

---

## *Ejercicios Propuestos 1.7*

1. Con las proposiciones:
   - $\boldsymbol{m}$ : Yo gano las elecciones.
   - $\boldsymbol{n}$ : Guayaquil tiene autobuses articulados
   - $\boldsymbol{p}$ : Ustedes tienen transporte.

   Se construye los siguientes razonamientos. Determine cual de ellos NO es válido.
   a) $[(m\rightarrow n)\wedge(n\rightarrow p)]\rightarrow(m\rightarrow p)$
   b) $[(m\rightarrow\neg n)\wedge(n\rightarrow p)]\rightarrow(p\vee\neg n)$
   c) $[(m\rightarrow n)\wedge\neg m]\rightarrow\neg n$
   d) $[\neg m\wedge(\neg n\rightarrow m)]\rightarrow n$
   e) $[(m\rightarrow n)\wedge(n\rightarrow p)\wedge\neg p]\rightarrow\neg m$

2. Dadas las siguientes premisas:
   - $\boldsymbol{H_1}$ : Si veo mucha TV, entonces no tengo que estudiar.
   - $\boldsymbol{H_2}$ : Veo mucha TV.

   considerando las proposiciones: $\boldsymbol{p}$ : Veo mucha TV y $\boldsymbol{q}$ : Tengo tiempo para estudiar.
   Entonces una conclusión para un RAZONAMIENTO VÁLIDO es:
   a) $\neg p$
   b) $q$
   c) $\neg p\wedge q$
   d) $\neg p\vee q$
   e) $p\vee\neg q$

3. Dado el razonamiento $\boldsymbol{P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge P_4\Rightarrow C}$ ; donde:
   - $\boldsymbol{P_1}$ : Si estudio, aprenderé.
   - $\boldsymbol{P_2}$ : Si aprendo, aprobaré el curso.
   - $\boldsymbol{P_3}$ : O practico tenis o no practico tenis.
   - $\boldsymbol{P_4}$ : No apruebo el curso.

   Entonces una conclusión $\boldsymbol{C}$ que hace el RAZONAMIENTO VÁLIDO es:
   a) Estudio b) No estudio c) Apruebo el curso d) Aprendo e) N.A.

4. Analice la VALIDEZ de los siguientes razonamientos:

a) Si tú muestras la verdad, revelarás lo ridículo de las pretensiones del hombre. Si el hombre es prepotente, es porque no se ha revelado lo ridículo de sus pretensiones. El hombre es prepotente. Por consiguiente, tú no muestras la verdad.
b) Si Genaro tomó el tren especial, entonces estuvo en el accidente, y si estuvo en el accidente, entonces no asistió a la reunión. Genaro tomó el tren especial o no asistió a la reunión. Luego, Genaro estuvo en el accidente.
c) O Calderón tiene enemigos en la administración o, si excede su cuota, recibirá un ascenso. Calderón no recibirá un ascenso. Luego, Calderón tiene enemigos en la administración o no excederá su cuota.
d) Si pago al sastre no me quedará dinero. Solamente puedo llevar a mi novia al baile si tengo dinero. Si no la llevo al baile, se sentirá desdichada. Pero si le pago al sastre, no me entregará el traje, y sin el traje no puedo llevar a mi novia al baile. O le pago al sastre o no le pago. Luego, mi novia tendrá que sentirse desdichada.

5. Si se tiene un razonamiento con las siguientes premisas:

$H_1$ : Si el freno falla o el camino está helado, entonces el coche no parará

$H_2$ : Si el coche se revisó, entonces no falla el freno.

$H_3$ : Pero el coche no se revisó.

Una conclusión que lo hace VÁLIDO es:
a) El coche no parará.
b) El freno falla y el camino no está helado.
c) Si no falla el freno y el camino no está helado, el coche parará.
d) El coche no parará o el camino no está helado.
e) Ninguna de las conclusiones es válida.

6. Considere las siguientes hipótesis:

$H_1$ : El *Banco del Progreso* cerró sus puertas y sus clientes recuperarán su dinero.

$H_2$ : Si los clientes del *Banco del Progreso* recuperarán su dinero entonces no existe intranquilidad.

$H_3$ : El *Banco del Progreso* no cerró sus puertas o no existe intranquilidad.

Entonces una CONCLUSIÓN VÁLIDA para un razonamiento, es:
a) Si no existe intranquilidad entonces los clientes del *Banco del Progreso* no recuperarán su dinero.
b) El *Banco del Progreso* no cerró sus puertas.
c) No existe intranquilidad y los clientes del *Banco del Progreso* recuperarán su dinero.
d) Ni el *Banco del Progreso* cerró sus puertas, ni sus clientes recuperarán su dinero.
e) Ninguna de las conclusiones anteriores es válida.

7. Considere las siguientes hipótesis:

$H_1$ : Ecuador adoptó el sistema de sistema de dolarización y pretende mejorar su economía.

$H_2$ : Si Ecuador pretende mejorar su economía entonces no habrá descontento social.

$H_3$ : Ecuador no adoptó el sistema de dolarización o no habrá descontento social

Entonces, una CONCLUSION VALIDA para un razonamiento es:
a) No habrá descontento social y Ecuador pretende mejorar su Economía.
b) Ni Ecuador adoptó el sistema de dolarización, ni pretende mejorar su Economía.
c) Ecuador no adoptó el sistema de dolarización.
d) Si no hay descontento social entonces Ecuador no pretende mejorar su Economía.
e) Ninguna de las conclusiones anteriores es válida.

## Misceláneos

1. Si la forma proposicional $[(p \to q) \wedge r] \to (r \to q)$ es FALSA, entonces es VERDAD que:
   a) $p$ es verdadera.
   b) $p$ es falsa y $r$ es verdadera.
   c) $r$ es falsa.
   d) El valor de verdad de $p$ no puede ser definido.
   e) $q$ es verdadera.

2. Una de las siguientes proposiciones es VERDADERA, identifíquela.
   a) $(p \to q) \vee r \equiv p \to (q \vee r)$
   b) $(p \to q) \wedge r \equiv p \to (q \wedge r)$
   c) $(p \wedge q) \to r \equiv p \wedge (q \to r)$
   d) $(\neg p \vee \neg q) \equiv p \to q$
   e). $(\neg q \vee p) \equiv p \to q$

3. Sean las proposiciones:

   $p$ **:** Todos los alumnos cumplen con sus obligaciones.

$q$ **:** Todos los alumnos aprueban el examen.

$r$ **:** El profesor recompensa a los alumnos con una semana de vacaciones.

Entonces la TRADUCCIÓN al lenguaje simbólico de la proposición:

"*Si todos los alumnos cumplen con sus obligaciones y logran aprobar el examen, el profesor los recompensará con una semana de vacaciones; pero, si algún alumno resultara reprobado, el profesor no adoptará esa medida*";

es:

a) $[q \wedge r] \to r \wedge [q \vee \neg r]$

b) $[(q \wedge \neg p) \to r] \wedge [\neg q \vee r]$

c) $[q \wedge \neg r] \leftrightarrow [p \wedge q \wedge r]$

d) $[r \to q] \wedge [(p \wedge q) \to r]$

e) $[(p \wedge q) \to r] \wedge [\neg r \to \neg q]$

4. La NEGACIÓN de la proposición: $p \to \neg q$ es:

a) $\neg p \to q$

b) $q \to \neg p$

c) $p \wedge q$

d) $\neg p \vee \neg q$

e) $\neg p \wedge \neg q$

5. La TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la proposición: *"Si resuelvo bien el examen y no está difícil, mis padres me felicitarán."*

Siendo las proposiciones:

*a*: Yo resuelvo bien el examen.

*b*: El examen está difícil.

*c:* Mis padres me felicitarán.

Es:

a) $a \to (b \vee c)$

b) $(a \wedge \neg c)$

c) $a \vee (b \vee c)$

d) $a \to \neg(b \vee c)$

e) $a \to (b \wedge \neg c)$

6. La proposición:

"*Junior es débil, siempre que no coma pescado*"

es EQUIVALENTE a:

a) Junior es fuerte o come pescado.
b) Junior es débil y come pescado.
c) Junior es débil cuando come pescado.
d) Junior es fuerte o no come pescado.
e) Junior es débil o come pescado.

7. La CONTRARRECÍPROCA de la proposición:

"*Si estudio y apruebo el Prepolitécnico, entonces estaré alegre*", es:

a) Si estoy alegre, entonces estudié y aprobé el Prepolitécnico.
b) Estudio y estoy alegre, entonces aprobaré el Prepolitécnico.
c) Si no estoy alegre, entonces no estudié o no aprobé el Prepolitécnico.
d) Apruebo el Prepolitécnico y estoy alegre, porque estudié.
e) Si no he estudiado, entonces no aprobaré el Prepolitécnico.

8. Considerando la forma proposicional $\neg(p \vee q) \to (r \vee s)$. Entonces una de las siguientes proposiciones es FALSA, identifíquela.

a) La recíproca es $(r \vee s) \to (\neg p \wedge \neg q)$.

b) La contrarrecíproca es $(\neg r \wedge \neg s) \to (p \vee q)$.

c) La inversa es $(p \vee q) \to (\neg r \wedge \neg s)$.

d) La inversa es equivalente a $(p \vee q) \vee (r \vee s)$.

e) La forma proposicional dada es equivalente a $(p \vee q) \vee (r \vee s)$.

9. Una de las siguientes proposiciones NO ES TAUTOLÓGICA, identifíquela.

a) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

b) $(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)]$

c) $[(q \leftrightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)] \to (r \leftrightarrow p)$

d) $p \to [q \to (q \wedge p)]$

e) $(p \wedge q \wedge r) \to \neg(r \vee q)$

10. Considerando las siguientes proposiciones:
$p$ : Daniel es feliz
$q$ : Daniel estudia todos los días.
$r$ : Daniel aprueba el prepolitécnico
Entonces la TRADUCCIÓN al lenguaje formal de: "*Daniel es feliz sólo si estudia todos los días y aprueba el prepolitécnico*"
Es:
a) $r \to (p \wedge q)$
b) $(q \wedge r) \to p$
c) $(q \wedge r) \vee \neg p$
d) $\neg(q \wedge r) \vee p$
e) $\neg p \to \neg(q \wedge r)$

11. La siguiente proposición: "*La empresa no hace publicidad y no cambia su producción siempre que la demanda aumente*" es EQUIVALENTE a:
a) Si la empresa no hace publicidad y no cambia su producción, entonces la demanda aumenta.
b) Si la empresa hace publicidad o cambia su producción, entonces la demanda no aumenta.
c) Si la demanda no aumenta, entonces la empresa hace publicidad y cambia su producción.
d) La empresa hace publicidad y cambia su producción, o la demanda aumenta.
e) La empresa hace publicidad o, si cambia su producción entonces la demanda no aumenta.

12. Dadas las siguientes premisas:
$P_1$ : Si se paga el rescate, entonces los técnicos petroleros aparecerán vivos y retornarán a sus países de origen.
$P_2$ : Si la policía interviene, entonces los técnicos petroleros no retornarán a sus países de origen.
$P_3$ : Se paga el rescate.
Entonces una CONCLUSIÓN VÁLIDA para un razonamiento es:
a) Los técnicos petroleros no aparecen vivos.
b) No se paga el rescate.
c) Si los técnicos petroleros no retornan a sus países de origen, entonces la policía interviene.
d) La policía interviene.
e) Los técnicos petroleros no retornan a sus países de origen.

13. Dadas las proposiciones atómicas:
$p$ : Voy a rendir el examen.
$q$ : Me presento al examen.
$r$ : Reprobaré.
La TRADUCCIÓN al lenguaje formal de la proposición "*Voy a rendir el examen porque si no me presento al examen entonces reprobaré*"
es:
a) $(q \vee r) \to p$
b) $\neg(q \vee r) \vee p$
c) $p \to (q \vee r)$
d) $r \to (\neg p \wedge q)$
e) $r \to \neg(p \wedge q)$

14. Dada la proposición:
"*Juan asiste a clases de Matemáticas siempre y cuando no tenga otras ocupaciones*"
Entonces, su proposición CONTRARECÍPROCA es:
a) Si Juan asiste a clases, entonces no tiene otras ocupaciones.
b) Si Juan tiene otras ocupaciones, entonces asiste a clases.
c) Si Juan no asiste a clases, entonces tiene otras ocupaciones.
d) Si Juan tiene otras ocupaciones, entonces no asiste a clases.
e) Si Juan no asiste a clases, entonces no tiene otras ocupaciones.

15. Dadas las siguientes premisas:
$H_1$ : Si estudio mucha Lógica, entonces no reprobaré el curso.
$H_2$ : Estudio mucha Lógica.
Entonces, la CONCLUSIÓN para un razonamiento válido, es:
a) No estudio mucha Lógica.
b) Reprobaré el curso.
c) Estudio mucha Lógica ó no reprobaré el curso.
d) No estudio mucha lógica y estudio mucha Lógica.
e) No estudio mucha Lógica ó reprobaré el curso.

16. Si la forma proposicional $(\neg p \vee q) \to [(\neg r \wedge p) \to (s \vee t)]$ es FALSA. Entonces una de las siguientes proposiciones es VERDADERA, identifíquela.
    a) $(p \to 1) \equiv 0$
    b) $(\neg s \wedge t) \equiv 1$
    c) $(\neg r \wedge p) \equiv 0$
    d) $[(p \wedge \neg t) \vee s] \equiv 1$
    e) $(s \vee t) \equiv 1$

17. Considere las proposiciones:
    a: La dolarización es un proceso adecuado para el país.
    b: El país debe salir de la crisis económica.
    c: Las personas mantienen una mentalidad positiva.
    La TRADUCCION al lenguaje formal de la siguiente proposición:
    "*La dolarización es un proceso adecuado para el país si las personas mantienen una mentalidad positiva, pero si las personas no mantienen una mentalidad positiva, el país no sale de la crisis económica.*"
    Es:
    a) $(c \to \neg a) \wedge (\neg a \to \neg b)$
    b) $(c \to a) \wedge (\neg a \to \neg c)$
    c) $a \wedge (\neg c \to \neg b)$
    d) $(\neg c \vee a) \wedge (c \vee \neg b)$
    e) $a \to (\neg b \to \neg c)$

18. Considere la proposición molecular:
    " Es suficiente que Lulú no quiera a Andrés para que si Lulú termina con Juan entonces a ella no le gustan los hombres feos".
    Entonces una proposición EQUIVALENTE es:
    a) Es necesario que Lulú termine con Juan o que le gusten los hombres feos para que no quiera a Andrés.
    b) Lulú quiere a Andrés pero no es verdad que terminó con Juan o le gusten los hombres feos.
    c) Es suficiente que Lulú termine con Juan y le gusten los hombres feos para que quiera a Andrés.
    d) Es suficiente que a Lulú le gusten los hombres feos para que termine con Juan y quiera a Andrés.
    e) Es necesario que Lulú termine con Juan para que a Lulú le gusten los hombres feos y quiera a Andrés.

19. Si se tiene un razonamiento con las siguientes premisas:
    $H_1$:La dolarización es difícil o no les gusta a muchas personas.
    $H_2$:Si las medidas económicas son viables, entonces la dolarización no es difícil.
    Una CONCLUSION que lo hace válido, es:
    a) La dolarización es difícil.
    b) Las medidas económicas son viables.
    c) Si las medidas económicas no son viables, a muchas personas no les gusta la dolarización.
    d) Si a muchas personas les gusta la dolarización, las medidas económicas no son viables.
    e) Las medidas económicas no son viables o la dolarización es difícil.

20. Si se da la proposición:
    ***"Si he estudiado mucho o me he preparado lo suficiente, entonces no daré un mal examen o mis padres estarán contentos"***
    Entonces su proposición CONTRARECIPROCA es:
    a) Si no doy un mal examen y mis padres no están contentos, no he estudiado ni me he preparado lo suficiente.
    b) He estudiado mucho, me he preparado lo suficiente, no daré un mal examen y mis padres estarán contentos.
    c) Ni he estudiado mucho ni me he preparado lo suficiente, porque mis padres no estarán contentos y daré un mal examen.
    d) Ni he estudiado mucho ni me he preparado lo suficiente, si doy un mal examen y mis padres están contentos.
    e) No daré un mal examen o mis padres estarán contentos sólo si he estudiado mucho.